**4. Bases orthogonales**

**5.1. Définitions et exemples .**

**Définition 1** :

Soient  un  de dimension finie et . Une base de  est dite orthogonale relativement à  si les vecteurs de  sont deux à deux orthogonaux , c’est-à-dire , , 

**Exemple 1 :** Soit  définie par : Montrer que la base  de  est orthogonale relativement à .

**Solution** : On a   D’où la base  de  est orthogonale relativement à.

**Exemple 2 :** Soit  définie par : Montrer que la base  de  est orthogonale relativement à .

**Solution** : On a  , donc la base  de  est orthogonale relativement à 

**5.2. Existence de la base orthogonale**

**Lemme 1** : Soient un corps de caractéristique distincte de deux ,un  et une forme bilinéaire symétrique non nulle définie sur. Alors il existe dans  un vecteur non isotrope relativement à . **Démonstration** :  étant non nulle, donc il existe  dans  tel que . On a , donc , et  ne peuvent pas être nuls à la fois. Par conséquent, l’un au moins des trois vecteurs  est non isotrope.

**Lemme 2** : Soient  un  de dimension finie,  un sous-espace de , et  définie par :  On a alors les équivalences suivantes :   où (1)  , (2)  est non dégénérée et (3) 

**Démonstration** :  :    : Il est évident que , donc il suffit de montrer que  Soit , on définit l’application  de  dans  comme suit : , alors . On a  donc  est non dégénérée. Par conséquent le morphisme associé  est bijectif, donc  . Or , donc  ou encore  il s’ensuit alors  ou encore . Par conséquent,  avec , d’où  . Comme par hypothèse , , donc .

**Théorème** 1: Soient un corps de caractéristique différente de deux,  un  et une forme bilinéaire symétrique définie sur. Alors il existe dans  une base orthogonale relativement à .

**Démonstration** :  Si  est nulle, toute base de  est orthogonale relativement à . Dans le cas où  n’est pas nulle, on démontre l’existence d’une telle base par récurrence sur  (1)  :  étant non nulle, donc d’après le **lemme 1**, il existe dans  un vecteur non isotrope . On considère le sous-espace et la forme bilinéaire symétrique  définie sur  comme suit : .  étant une base de  et , donc est non dégénérée. On a donc, d’après le **lemme 2,**  , d’où  est une base de et elle est orthogonale par construction. Le théorème est démontré pour  (2) Hypothèse de récurrence : Supposons le théorème est vérifié pour c’est-à-dire , tout  de dimension  possède une base orthogonale relativement à toute forme bilinéaire symétrique définie sur le dit espace. (3) Montrons que le théorème est vérifié pour :  étant non nulle, donc d’après le **lemme 1**, il existe dans  un vecteur non isotrope . On considère le sous-espace et la forme bilinéaire symétrique  définie sur  comme suit : . La famille  étant une base de  et , donc est non dégénérée. Par conséquent, d’après le **lemme 2,** , donc . On considère  définie par  :Par hypothèse de récurrence, il existe dans  une base orthogonale  relativement . On pose , alors  est une base de  et elle est orthogonale par construction relativement à . De (1) , (2) et (3) le théorème est démontré.